Exercice 1 Au choix. Une Correction :(5 points)

1. La largeur de l'arc est égal à $2x$ et sa hauteur est égale à $\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x} - 2)$.

   Le problème étudié revient à résoudre l'équation $\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x} - 2) = 2x$

   $\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x} - 2) = 2x \iff \mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x} - 2 = 4x \iff \mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x} - 2 - 4x = 0$

2. (a) En tant que somme d'exponentielles et d'une fonction affine (ou polynôme de degré 1), f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ donc a fortiori sur I.

   (b) Pour $x > 0$, $x\left(\frac{\mathrm{e}^x}{x} - 4\right) = \cancel{x} \times \frac{\mathrm{e}^x}{\cancel{x}} - 4x = \mathrm{e}^{x} - 4$ donc $f(x)$ peut bien s'écrire sous la forme proposée.

   (c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$ par croissance comparée, donc par somme puis produit,

   $\lim\limits_{x \to +\infty} x\left(\frac{\mathrm{e}^x}{x} - 4\right) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$

   Par somme, on obtient $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$

3. (a) $\boxed{f'(x) = \mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x} - 4}$

   (b) $f'(x) = 0 \iff \mathrm{e}^{x} - \frac{1}{\mathrm{e}^{x}} - 4 = 0 \iff \frac{(\mathrm{e}^{x})^2 - 4\,\mathrm{e}^{x} - 1}{\mathrm{e}^{x}} = 0 \iff (\mathrm{e}^{x})^2 - 4\,\mathrm{e}^{x} - 1 = 0$.

   (c) Si on pose $X = \mathrm{e}^{x}$ alors $(\mathrm{e}^{x})^2 - 4\,\mathrm{e}^{x} - 1 = 0 \iff X^2 - 4X - 1 = 0$

   $\Delta = 16 - 4 \times 1 \times (-1) = 16 + 4 = 20 > 0$ donc l'équation admet deux solutions :

   $X_1 = \frac{4 - \sqrt{20}}{2} = \frac{4 - 2\sqrt{5}}{2} = 2 - \sqrt{5} \approx -0,24 < 0$ et $X_2 = 2 + \sqrt{5} \approx 4,24 > 0$

   $\mathrm{e}^{x} = 2 - \sqrt{5}$ n'a pas de solution car $\mathrm{e}^{x} > 0$, donc la seule possibilité est $\mathrm{e}^{x} = 2 + \sqrt{5}$. Comme l'exponentielle est bijective, cette équation admet une solution unique α.

   Donc $f'(x)$ s'annule pour une seule valeur.
   (N.B. : Cette valeur est égale à $\ln(2 + \sqrt{5})$).

4. (a) D'après le cours sur le signe d'un trinôme du second degré, on obtient le tableau de signes de la fonction dérivée f' de f ci-dessous :

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

   Par suite, on obtient le tableau de variations suivant :

x	0		α		$+\infty$
$f(x)$	0	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

   avec $f(0) = 1 + 1 - 0 - 2 = 0$
   et $f(\alpha) = f\left(\ln\left(2 + \sqrt{5}\right)\right) \approx -3,3$

   (b) — Sur $]0\,;\,\alpha]$, $f(x) < 0$ donc l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution.

— Sur $[\alpha\,;\,+\infty[$, f est continue et strictement croissante.Or $f(\alpha) < 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ donc est strictement positive (d'après 2c).
Donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires (ou "théorème de la bijection"), l'équation admet une unique solution β.

5. On obtient un encadrement de β : $\boxed{2,4 < \beta < 2,5}$

6. $\mathrm{e}^{\frac{t}{39}} + \mathrm{e}^{-\frac{t}{39}} - 4\dfrac{t}{39} - 2 = 0 \iff \mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x} - 4x - 2 = 0$ avec $x = \dfrac{t}{39}$

   Cette équation a une unique solution β et $\beta = \dfrac{t}{39} \iff t = 39\beta$ donc la hauteur de l'arche est $2t = 78\beta$

   $2,4 < \beta < 2,5 \iff 187,2 < 78\beta < 195$

   donc la hauteur de l'arche est comprise entre 187,2 et 195 mètres.