DEVOIR SURVEILLÉ N° 01 ter

Nom : Correction Prénom : ....

- Travailler la rédaction proposée dans ce corrigé
- Garder autant que possible la dérivée sous forme factorisée, en vue d'une étude de signe.

Exercice 1 *(7 pts)*
Dans chaque cas, calculer $f'(x)$ en précisant l'ensemble de définition de f et son ensemble de dérivabilité

1. $f(x) = 4x^3 - 5x^2 + x - 1$
   En tant que polynôme, f est définie, continue, dérivable sur $\mathbb{R}$.
   $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 12x^2 - 10x + 1$

2. $f(x) = 5x^3 - \frac{1}{x} + 3\sqrt{x}$
   En tant que somme d'un polynôme, d'une fraction rationnelle et d'une racine carrée, f est définie et continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ (car le dénominateur de $\frac{1}{x}$ s'annule en 0 et $x \mapsto \sqrt{x}$ est définie sur $\mathbb{R}^+$ mais dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$).
   $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = 15x^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{3}{2\sqrt{x}}$

3. $f(x) = (x^2 + 1)(x^3 - 2x)$
   En tant que polynôme (développer pour s'en convaincre), f est définie, continue, dérivable sur $\mathbb{R}$.
   $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2x(x^3 - 2x) + (x^2+1)(3x^2 - 2)$
   $= 2x^4 - 4x^2 + 3x^4 - 2x^2 + 3x^2 - 2$
   $= 5x^4 - 3x^2 - 2$

4. $f(x) = \frac{2x^2-3}{x^2+7}$
   En tant que fraction rationnelle, f est définie, continue et dérivable, sauf pour les valeurs de x qui annulent son dénominateur, donc sur $\mathbb{R}$.
   ($x^2 + 7 = 0$
   $\Leftrightarrow x^2 = -7$
   impossible dans $\mathbb{R}$)
   $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{4x(x^2+7) - (2x^2-3) \times 2x}{(x^2+7)^2}$
   $= \frac{4x^3 + 28x - 4x^3 + 6x}{(x^2+7)^2}$
   $= \frac{34x}{(x^2+7)^2}$

à garder sous forme factorisée !

Oui, il faut l'écrire même quand l'énoncé dit "définie sur $\mathbb{R}$" : et il est toujours obligatoire de vérifier la dérivabilité AVANT de dériver : on regarde avant de traverser ; après c'est trop tard !

Exercice 2 *(3 pts)*

Déterminer les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - x^2 - x$

En tant que polynôme, f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$ polynôme du second degré

$\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4 \times 3 \times (-1) = 16 = 4^2$

$x_1 = \frac{2-4}{6} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}$; $x_2 = \frac{2+4}{6} = 1$

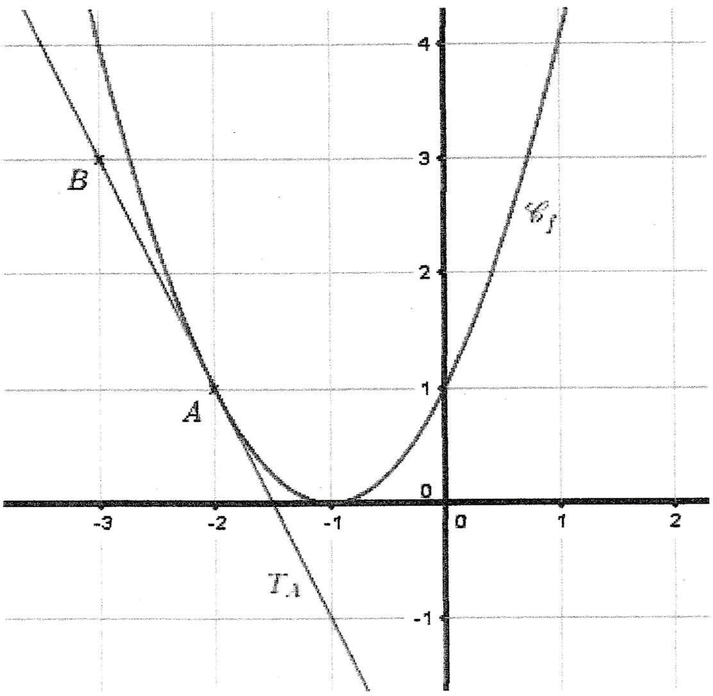
x		$-1/3$		1	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\nearrow$	$5/27$	$\searrow$	-1	$\nearrow$

$f(-\frac{1}{3}) = -\frac{1}{27} - \frac{1}{9} + \frac{1}{3} = \frac{5}{27}$

$f(1) = -1$

Exercice 3 *(7 pts) On considère une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$, dont la représentation graphique $\mathscr{C}_f$ est donnée ci-dessous.*

Le point $A(-2;1)$ appartient à cette courbe, et la tangente T_A à $\mathscr{C}_f$ au point A passe également par le point $B(-3;3)$.



1. *Déterminer une équation de la droite T_A*

La pente de T_A est $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3-1}{-3-(-2)} = \frac{2}{-1} = -2$

Donc l'équation de T_A est de la forme $T_A \mid y = -2x + p$.

Or $A(-2;1) \in T_A$, donc $1 = -2 \times (-2) + p$

$\iff 1 = +4 + p$

$\iff p = -3$

Finalement, $T_A \mid y = -2x - 3$

Besoin de revoir les équations de droite ? Voir sur le site :
Term STMG / Cours / Ch01_2 Rappels équations de droites.
Corrigé dans Term_STMG / Exercices / Tstmg01_2 correction page 1 à 3.

2. *En déduire $f'(-2)$.*

Le nombre dérivé en $x = -2$ est la pente de la tangente au point de la courbe d'abscisse -2, donc $\boxed{f'(-2) = -2}$

Exercice 4 *(3 pts) Soit $f : x \mapsto f(x) = x + 2 + \frac{4}{x-2}$.*
Déterminer une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse -2.

En tant que somme d'un polynôme et d'une fraction rationnelle, f est définie, continue et dérivable sauf pour les valeurs de x telles que $x - 2 = 0$, i.e. sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$, $f'(x) = 1 - \dfrac{4}{(x-2)^2} = \dfrac{(x-2)^2 - 4}{(x-2)^2} = \dfrac{x^2 - 4x}{(x-2)^2} = \dfrac{x(x-4)}{(x-2)^2}$

$$f'(-2) = \frac{4+8}{(-4)^2} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$$

$$f(-2) = -2 + 2 + \frac{4}{-4} = -1$$

$$T_{-2} \mid y = f'(-2)\,(x - (-2)) + f(2)$$

$$T_{-2} \mid y = \frac{3}{4}(x+2) - 1$$

$$T_2 \mid y = \frac{3}{4}x + \frac{3}{2} - 1$$

$$\boxed{T_{-2} \mid y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}}$$