10 Démontrer que si $q>1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n=+\infty$.

Pour cela on pose $q=1+a\ (a>0)$, et on démontre par récurrence que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $(1+a)^n \geqslant 1+na$ puis on conclut.

11 Démontrer que si une suite est convergente alors elle est bornée. (À rapprocher de l'exercice 2.)

Revenir à la définition de la limite d'une suite.

12 Démontrer que toute suite décroissante non minorée a pour limite $-\infty$.

13 Démontrer que toute suite décroissante minorée est convergente.

Dans les exercices 12 et 13, utiliser les résultats concernant les suites croissantes, § 4. C. du cours.

14 Démontrer que toute suite monotone bornée est convergente.

15 Démontrer que toute suite arithmétique de raison strictement positive a pour limite $+\infty$.

Utiliser l'exercice précédent.

S'ENTRAÎNER

Démonstration par récurrence

16 Démontrer que pour tout entier naturel $n\geqslant 1$:

$$\sum_{k=1}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2}$$

17 Démontrer que pour tout entier naturel $n\geqslant 1$:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

18 Démontrer que pour tout entier naturel $n\geqslant 1$:

$$\sum_{k=1}^{n} k^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

Pour les 16 à 18, on pourra calquer les démonstrations sur l'exemple du § 1. B.

19 Soit (u_n) la suite définie par $u_0=2$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$u_{n+1}=\sqrt{6+u_n}$$

Démontrer que pour tout entier naturel n, $2\leqslant u_n\leqslant 3$.

20 Soit (u_n) la suite définie par $u_0=0$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$u_{n+1}=2(u_n+2^n)$$

Démontrer que pour tout entier naturel n : $u_n=n2^n$.

Les deux suites sont des suites récurrentes car un terme est défini à partir du précédent.

Opérations sur les limites

21 Dans chaque cas, trouver deux suites (u_n) et (v_n) telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=-\infty$ et remplissant la condition donnée.

a. $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n+v_n)=+\infty$ **b.** $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n+v_n)=-\infty$ **c.** $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n+v_n)=12$

22 Dans chaque cas, trouver deux suites (u_n) et (v_n) telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=0$ et remplissant la condition donnée.

a. $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n\times v_n)=+\infty$ **b.** $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n\times v_n)=0$ **c.** $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n\times v_n)=2\,012$

23 Dans chaque cas, trouver deux suites (u_n) et (v_n) telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=-\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=+\infty$ et remplissant la condition donnée.

a. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=-\infty$ **b.** $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=0$ **c.** $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=-54$

24 Dans chaque cas, trouver deux suites (u_n) et (v_n) telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=0$ et remplissant la condition donnée.

a. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=+\infty$ **b.** $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=0$ **c.** $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=-3$

Les quatre exercices montrent que le terme « forme indéterminée » porte bien son nom !

Soit n un entier naturel. Supposons que l'on ait $(1+a)^n \geqslant 1+na$.

Alors :

$$(1+a)^{n+1}=(1+a)^n(1+a) \Rightarrow (1+a)^{n+1} \geqslant (1+na)(1+a) \text{ c'est notre supposition.}$$
$$\Rightarrow (1+a)^{n+1} \geqslant 1+a+na+na^2$$
$$\Rightarrow (1+a)^{n+1} \geqslant 1+(n+1)a+na^2$$
$$\Rightarrow (1+a)^{n+1} \geqslant 1+(n+1)a$$

Le caractère héréditaire de l'inégalité est donc établi pour tout $n \in N$, ce qu'il fallait démontrer.

Comme $a>0$, $\lim\limits_{n\to+\infty}(1+na)=+\infty$; on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(1+a)^n=+\infty$ par le théorème des gendarmes, ce qu'il fallait démontrer.

11 Soit ℓ la limite de la suite (u_n). Alors tous les termes u_n sont dans l'intervalle ouvert $]\ell-1;\ell+1[$ à partir d'un certain rang p. Autrement dit : $n \geqslant p \Rightarrow \ell-1 \leqslant u_n \leqslant \ell+1$. Pour tout $n \leqslant p$, appelons M la plus grande valeur de u_n et m la plus petite d'entre elles, alors on est sûr que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\ell-1 \leqslant u_n \leqslant \ell+1 \text{ ou } m \leqslant u_n \leqslant M$$

ce qui prouve que la suite (u_n) est bornée. En effet : si on appelle a le plus petit des deux nombres $\ell-1$ et m, et b le plus grand des deux nombres $\ell+1$ et M on a, pour tout $n \in \mathbb{N} : a \leqslant u_n \leqslant b$.

> À la place de l'intervalle $]\ell-1;\ell+1[$, on aurait pu en choisir un autre de la forme $]\ell-\varepsilon;\ell+\varepsilon[$ où ε est un nombre strictement positif.

12 Si une suite (u_n) est décroissante alors la suite $(-u_n)$ est croissante. Puisque (u_n) n'est pas minorée, $(-u_n)$ n'est pas majorée. La suite $(-u_n)$ est donc croissante et non majorée. On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty}(-u_n)=+\infty$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(-u_n)=-\infty$.

13 Si une suite (u_n) est décroissante et minorée par un nombre k alors la suite $(-u_n)$ est croissante et majorée par $-k$. Elle est donc convergente. $(-u_n)$ étant convergente, il en est de même de (u_n).

14 Une suite est bornée si et seulement si elle est à la fois majorée et minorée. Si elle est croissante, elle converge d'après le théorème de convergence croissante. Si elle est décroissante, elle est convergente d'après l'exercice précédent.

15 Soit $a>0$ la raison d'une suite arithmétique de premier terme b.

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n=an+b$. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}(an+b)=+\infty$, on en déduit par somme que $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$.

S'ENTRAÎNER

16 **Première étape :** l'égalité est vraie si $n=1$.

En effet :

$$\sum_{k=1}^{1} k=1 \text{ et } \frac{1(1+1)}{2}=1$$

Deuxième étape : hérédité pour tout $n \geqslant 1$.

Si l'égalité est vraie pour un entier naturel $n \geqslant 1$ alors :

$$\sum_{k=1}^{n+1} k=\sum_{k=1}^{n} k+n+1=\underbrace{\frac{n(n+1)}{2}}_{\text{on a supposé cela}}+n+1=(n+1)\left(\frac{n}{2}+1\right)$$
$$=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

L'égalité reste donc vraie si l'on remplace n par $n+1$. Ce qu'il fallait démontrer.

Bilan : l'égalité est vraie pour tout entier $n \geqslant 1$.

17 **Première étape :** l'égalité est vraie si $n=1$.

En effet : $\sum\limits_{k=1}^{1} k^2=1$ et $\dfrac{1(1+1)(2\times1+1)}{6}=1$.

Deuxième étape : hérédité pour tout $n \geqslant 1$.

Si l'égalité est vraie pour un entier naturel $n \geqslant 1$ alors :

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2=\sum_{k=1}^{n} k^2+(n+1)^2=\underbrace{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}_{\text{on a supposé cela}}+(n+1)^2$$
$$=(n+1)\left(\frac{n(2n+1)}{6}+n+1\right)=(n+1)\left(\frac{2n^2+n+6n+6}{6}\right)$$
$$=(n+1)\left(\frac{2n^2+7n+6}{6}\right)$$

D'autre part, lorsqu'on remplace n par $n+1$ dans le membre de gauche de l'égalité à démontrer, on obtient :

$$\frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}=\frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}$$

L'égalité reste donc vraie si l'on remplace n par $n+1$. Ce qu'il fallait démontrer.

Bilan : l'égalité est vraie pour tout entier $n \geqslant 1$.

Quand on remplace n par $n+1$, $2n+1$ devient $2(n+1)+1=2n+3$ et non $2n+2$.

18 **Première étape :** l'égalité est vraie si $n=1$.

En effet :

$$\sum_{k=1}^{1} k^3 = 1 \text{ et } \left(\frac{1(1+1)}{2}\right)^2 = 1$$

Deuxième étape : hérédité pour tout $n \geqslant 1$.

Si l'égalité est vraie pour un entier naturel $n \geqslant 1$ alors :

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 = \underbrace{\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2}_{\text{on a supposé cela}} + (n+1)^3$$

$$= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = (n+1)^2\left(\frac{n^2}{4} + (n+1)\right)$$

$$= (n+1)^2\left(\frac{n^2+4n+4}{4}\right) = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$$

L'égalité reste donc vraie si l'on remplace n par $n+1$.

Ce qu'il fallait démontrer.

Bilan : l'égalité est vraie pour tout entier $n \geqslant 1$.

On reconnaît $a^2+2ab+b^2$ dans n^2+4n+4.

19 Démontrons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'inégalité $2 \leqslant u_n \leqslant 3$.

Première étape : l'inégalité est vraie si $n=0$ car $u_0 = 2$.

Deuxième étape : si, pour un entier naturel n donné $2 \leqslant u_n \leqslant 3$ alors :

$$6+2 \leqslant 6+u_n \leqslant 3+6 \Rightarrow \sqrt{8} \leqslant \sqrt{6+u_n} \leqslant \sqrt{9} \Rightarrow 2 \leqslant u_{n+1} \leqslant 3$$

L'inégalité reste vraie si on remplace n par $n+1$, ce qu'il fallait démontrer.

Conclusion : l'inégalité est vraie pour tout entier naturel n.

Si on pose $f(x)=\sqrt{6+x}$, on voit que f est croissante sur $[0\,;+\infty[$ en calculant sa dérivée par exemple. D'autre part $u_{n+1}=f(u_n)$ et on conclut disant que $f(2) \leqslant f(u_n) \leqslant f(3)$.

20 **Première étape :** l'égalité est vraie si $n=0$ car $u_0=0$ et $0\times 2^0=0$.

Deuxième étape : si, pour un entier n donné, $u_n = n2^n$ alors :

$$u_{n+1} = 2(n2^n+2^n) = 2\times 2^n(n+1) \Rightarrow u_{n+1} = 2^{n+1}(n+1)$$

ce qu'il fallait démontrer.

Conclusion : l'égalité est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

21 **a.** Posons $u_n = n^2$ et $v_n = -n$. Alors $u_n + v_n = n^2 - n = n^2\left(1-\frac{1}{n}\right)$.

Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)=1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$. Par produit : $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n+v_n)=+\infty$.

b. Il suffit de poser $u_n = n$ et $v_n = -n^2$.

Alors $u_n + v_n = n^2\left(\frac{1}{n}-1\right)$ et on conclut comme dans le **a.**

c. Il suffit de poser $u_n = n+12$ et $v_n = -n$.

Alors $u_n + v_n = 12$ et on conclut.

Dans les questions **a.** et **b.** on n'a pas choisi u_n et v_n sans raison.
Par exemple dans le **a.** : la limite de la somme étant celle de u_n, c'est u_n qui doit être la « plus forte » d'où le choix de n^2 qui « domine » $-n$.
On aurait aussi pu choisir $u_n = n^4$ et $v_n = -n$, etc.
Idem pour la question **b.**

22 **a.** Posons $u_n = n^2$ et $v_n = \frac{1}{n}$. Alors $u_n \times v_n = n^2 \times \frac{1}{n} = n$ et on peut conclure.

b. Il suffit de poser $u_n = n$ et $v_n = \frac{1}{n^2}$. Alors $u_n \times v_n = \frac{1}{n}$ et on peut conclure.

c. Il suffit de poser $u_n = 2\,012n$ et $v_n = \frac{1}{n}$. Alors $u_n \times v_n = 2\,012$ et on peut conclure.

23 **a.** Posons $u_n = -n^2$ et $v_n = n$. Alors $\frac{u_n}{v_n} = -n$ et on peut conclure.

b. Posons $u_n = -n$ et $v_n = \frac{1}{n^2}$. Alors $\frac{u_n}{v_n} = -\frac{1}{n}$ et on peut conclure.

c. En posant $u_n = -54n$ et $v_n = n$, on trouve $\frac{u_n}{v_n} = -54$ ce qui permet de conclure.