4 Angles orientés, trigonométrie

Aperçu historique :

Le mot trigonométrie vient du grec trigonos (trois angles, triangulaire) et de metron (mesure). C'est la science qui traite des relation entre les distances et les angles dans un triangle.
Ses origines remontent aux civilisations Égyptienne, Mésopotamienne et de la vallée de l'Indus, il y a plus de 4000 ans.
*Les Grecs ont principalement étudié la trigonométrie comme un outil pour l'astronomie. L'astronome et mathématicien grec **Hipparque de Nicée** (-190 ; -120) construisit les premières tables trigonométriques. Mais c'est le grec **Ptolémée** qui les fit connaître vers l'an 150.*
*Dans le monde Musulman, en revanche, la trigonométrie était considérée comme une discipline à part entière. **Omar Khayyam** (1048-1131) a utilisé la trigonométrie pour fournir des méthodes de résolutions d'équations algébriques par la géométrie. Des méthodes détaillées de constructions de tables de sinus et cosinus pour tous les angles sont écrites par le mathématicien **Bhaskara II** en 1150. Au XIIIème siècle, **Nasir al-Din Tusi** est l'un des premiers à considérer la trigonométrie comme une discipline distincte des mathématiques. Enfin, au XIVème siècle, **Al-Kashi** réalise des tables de fonctions trigonométriques lors de ses études en astronomie.*
*En Europe, la trigonométrie se développe vers le milieu du XIVème siècle avec la traduction en latin des œuvres de **Ptolémée**. Les pionniers en ce domaine sont **Georg von Purbach** et surtout son étudiant **Regiomontanus**, qui ont redécouvert à la fin du Moyen-âge les tables d'**Hipparque de Nicée**. Suivent au début du XVIème siècle les traités d'**Oronce Finé**, **Pedro Nunes** et **Joachim Rheticus**. Le mathématicien silésien(*) **Bartholomaeus Pitiscus** publie un travail remarquable sur la trigonométrie en 1595, dont le titre (Trigonometria) a donné son nom à la discipline.*
*C'est le mathématicien flamand **Adrien Romain** qui introduit la notation moderne "sinα".*
(*)La Silésie est à cheval entre la Pologne, la République Tchèque et l'Allemagne.

Ptolémée
Egypte (90-165)

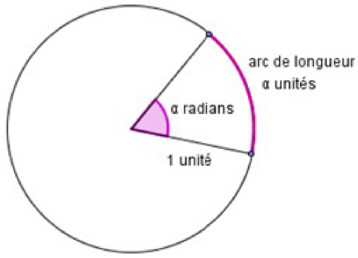
Al Kashi
Iran (1380-1429)

Bartholomaeus Pitiscus
Silesie(1561-1613)

1. Enroulement de $\mathbb{R}$ sur le cercle trigonométrique et radians (rappels)

A. Mesure d'un angle en radians

Définition 4.1 Le <u>radian</u> est une unité de mesure des angles.
On dit qu'un angle mesure α radians lorsque, en tant qu'angle au centre d'un cercle de rayon 1, il intercepte un arc de longueur α unités.

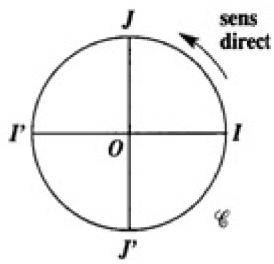


La mesure d'un angle en radians est proportionnelle à sa mesure en degrés :

mesure en degrés	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$180°$	$360°$	$\approx 57°$
mesure en radians	0 rad	$\frac{\pi}{6}$ rad	$\frac{\pi}{4}$ rad	$\frac{\pi}{3}$ rad	$\frac{\pi}{2}$ rad	π rad	2π rad	1 rad

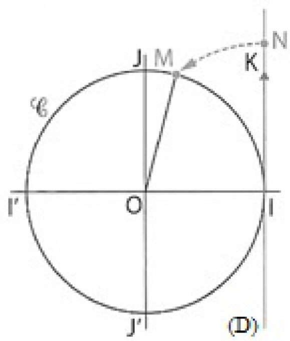
B. Enroulement de $\mathbb{R}$ sur le cercle trigonométrique

Définition 4.2 Un <u>cercle trigonométrique</u> est un cercle de centre O, de rayon 1, et <u>orienté dans le sens</u> *direct* ou *positif* (i.e. le sens contraire des aiguilles d'une montre).
Le plan est alors orienté.

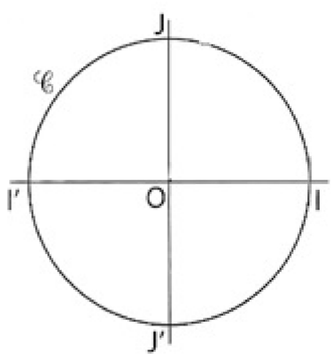


C. Repérage d'un point sur le cercle trigonométrique

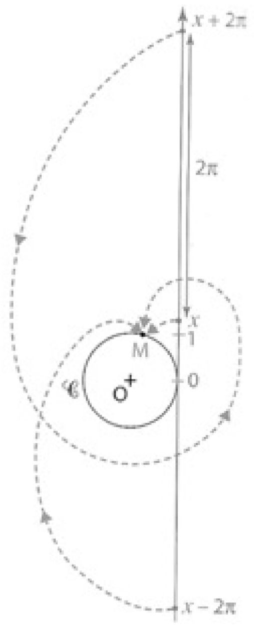
Définition 4.3 Soient (O, I, J) un repère orthonormé du plan, et $\mathscr{C}$ le cercle trigonométrique de centre O.
Soit (D) la tangente en I au cercle $\mathscr{C}$, munie d'un repère (I, K) tel que $\overrightarrow{IK} = \overrightarrow{OJ}$.
En "enroulant" la droite des réels (D) autour du cercle trigonométrique, à tout réel x repéré par un point N de la droite (D) on associe un unique point M du cercle trigonométrique.
On dit que M est associé à x. On note $M(x)$.



<u>**Exemple :**</u>



1. A quels réels sont associés les points I, J, I' et J' du cercle trigonométrique ? ....
2. Déterminer un réel associé au point A situé au milieu de l'arc $\overset{\frown}{IJ}$ en allant dans le sens positif : ....
3. Placer les points $B\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ et $C\left(\frac{5\pi}{4}\right)$.



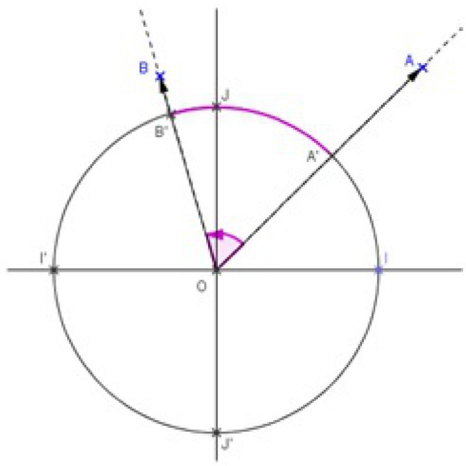
Propriété 4.1 Soient x un réel, et M le point du cercle trigonométrique associé à x.
Alors M est aussi associé à tous les réels de la forme $x + k \times 2\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

En effet, si l'on considère $x + k \times 2\pi$, on "retombe" sur le point M, mais "après avoir fait k tours" (dans le sens positif si $k > 0$, négatif si $k < 0$).

Exemple :
Dans l'exemple précédent, déterminer deux autres réels associés au point B.
....

2. Angle orienté, mesures d'un angle orienté

A. Notions d'angle orienté et de mesures



Définition 4.4 Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls,
A et B deux points tels que $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$,
A' et B' les intersections respectives des demi-droites $[OA)$ et $[OB)$ avec le cercle trigonométrique.
L'orientation du cercle trigonométrique permet de définir l'angle orienté de vecteurs $(\vec{u}; \vec{v}) = (\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB})$.

Si $A'(a)$ et $B'(b)$, alors le réel $b - a$ est une mesure en radians de l'angle orienté $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB})$.

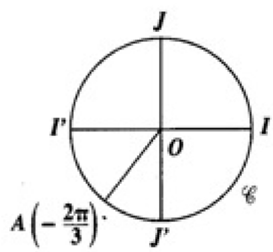
Notation : Pour alléger la rédaction, on notera aussi $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB})$ toute mesure de l'angle $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB})$.

Remarque :

- Comme A' est associé à tous les réels de la forme $a + k \times 2\pi$, et B' est associé à tous les réels de la forme $b + k' \times 2\pi$, avec $k, k' \in \mathbb{Z}$, un angle orienté admet **une infinité de mesures**, et deux de ces mesures diffèrent d'un multiple de 2π.
- Pour traduire que $\alpha \in \mathbb{R}$ est une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB})$, on écrira donc :

$$\begin{array}{llll} & (\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}) & = & \alpha + 2k\pi \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} & (\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}) & = & \alpha \quad \text{modulo } 2\pi \\ \text{ou} & (\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}) & = & \alpha \quad [2\pi] \end{array}$$

Exemple 1 :
Donne une mesure puis la mesure principale des angles orientés :
$(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OJ'})$ et $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OI'})$.
Réponses :
$(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OJ'}) = -\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{6} [2\pi]$
$(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OI'}) = \pi - \left(-\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{5\pi}{6} [2\pi]$



Exemple 2 :
Dans un carré $ABCD$ de sens indirect et de centre O, détermine une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{OC})$.
Réponse : $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{OC}) = (\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AO}) = -\frac{\pi}{4}$.

Cas particuliers :

$$(\vec{u};\vec{u}) = 0[2\pi] \text{ et } (\vec{u};-\vec{u}) = \pi[2\pi]$$

B. Mesure principale

Définition 4.5 On appelle mesure principale de l'angle orienté $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})$ l'unique mesure qui appartient à l'intervalle $]-\pi;\pi]$.

Propriété 4.2 La valeur absolue de la mesure principale de $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})$ est égale à la mesure de l'angle géométrique $\widehat{AOB}$.

Exemple : Donner la mesure principale des angles orientés $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OJ'})$ et $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OI'})$ évoqués dans l'exemple précédent.
Réponse : Comme on a $-\pi < \frac{\pi}{6} \leq \pi$, c'est aussi la mesure principale de $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OJ'})$.
En revanche $\frac{5\pi}{3} > \pi$, donc ce n'est pas la mesure principale ; on a $\frac{5\pi}{3} = \frac{6\pi-\pi}{3} = 2\pi - \frac{\pi}{3}$.
Donc la mesure principale de $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OI'})$ est $-\frac{\pi}{3}$.

3. Propriétés des angles orientés

Propriété 4.3 Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls d'un plan orienté.
(i) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires et de même sens $\iff (\vec{u};\vec{v}) = 0 + k \times 2\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$
(ii) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires et de sens contraires $\iff (\vec{u};\vec{v}) = \pi + k \times 2\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$

Conséquence immédiate : Soient A, B, C trois points distincts.
A, B, C sont alignés ssi $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) = 0 + k \times 2\pi$ ou $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) = \pi + k \times 2\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Propriété 4.4 (admise) Relation de Chasles.
Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs non nuls d'un plan orienté. On a :
$(\vec{u};\vec{v}) = (\vec{u};\vec{w}) + (\vec{w};\vec{v})$

Conséquence immédiate : La somme des angles orientés d'un triangle est égale à π.

Démonstration

$$\begin{aligned}
& (\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}) \\
= \; & (\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{AC};\overrightarrow{BC}) \\
= \; & (\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{AC};\overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}) \\
= \; & (\overrightarrow{AB};\overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}) \\
= \; & (\overrightarrow{AB};\overrightarrow{BA}) \\
= \; & \pi[2\pi]
\end{aligned}$$

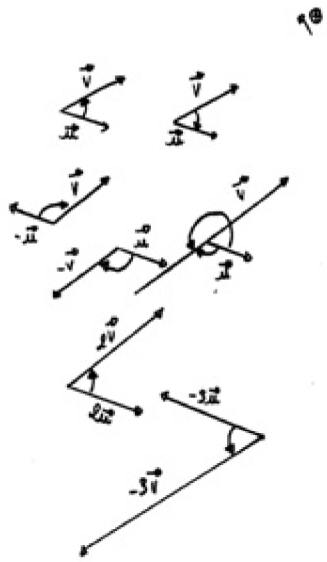
Propriété 4.5 Angles orientés associés. Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls.
1) On a :

(i) $(\vec{v};\vec{u}) = -(\vec{u};\vec{v})[2\pi]$

(ii) $(-\vec{u};\vec{v}) = (\vec{u};-\vec{v}) = (\vec{u};\vec{v}) + \pi[2\pi]$

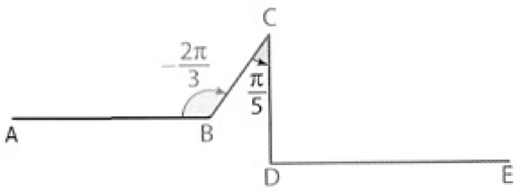
(iii) $(-\vec{u};-\vec{v}) = (\vec{u};\vec{v})[2\pi]$

2) Plus généralement, on a donc :
- $(k\vec{u};k'\vec{v}) = (\vec{u};\vec{v})[2\pi]$ si k et k' sont de même signe
- $(k\vec{u};k'\vec{v}) = (\vec{u};\vec{v}) + \pi[2\pi]$ si k et k' sont de signes contraires



Démonstration :
1) (i)avec la relation de Chasles : $(\vec{v};\vec{u}) + (\vec{u};\vec{v}) = (\vec{v};\vec{v}) = 0[2\pi]$.
(ii)$(-\vec{u};\vec{u}) + (\vec{u};\vec{v}) = (-\vec{u};\vec{v})$; or $(-\vec{u};\vec{u}) = \pi[2\pi]$,
donc $\pi + (\vec{u};\vec{v}) = (-\vec{u};\vec{v})$, d'où la propriété.
(iii)D'après ce qui précède,
$(-\vec{u};-\vec{v}) = (-\vec{u};\vec{u}) + (\vec{u};-\vec{v}) = \pi + (\vec{u};\vec{v}) + \pi = (\vec{u};\vec{v})[2\pi]$.
2) D'après la définition des mesures de l'angle orienté formé par deux vecteurs non unitaires, et les propriétés précédentes.

Exemple : $ABCDE$ est une ligne brisée telle que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DE}$ sont colinéaires et de même sens.
Déterminer la mesure principale de l'angle orienté $(\overrightarrow{DE};\overrightarrow{DC})$.



On connaît par hypothèse :
$(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{DE}) = 0[2\pi]$
$(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}) = -\frac{2\pi}{3}[2\pi]$
$(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CD}) = \frac{\pi}{5}[2\pi]$
On cherche $(\overrightarrow{DE};\overrightarrow{DC})$. On va utiliser le relation de Chasles pour introduire dans cette écriture des termes que l'on connaît par hypothèse :
- Comme $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DE}$ sont colinéaires et de même sens, on introduit le vecteur $\overrightarrow{AB}$ "auprès" du vecteur $\overrightarrow{DE}$.
- Comme on connaît $(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CD}) = \frac{\pi}{5}[\pi]$, et qui est aussi égal (modulo 2π) à $(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{DC})$ d'après le (iii) de la propriété **??**, on introduit $\overrightarrow{BC}$ "auprès de" $\overrightarrow{DC}$.

Il vient :
$(\overrightarrow{DE};\overrightarrow{DC}) = (\overrightarrow{DE};\overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AB};\overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BC};\overrightarrow{DC})[2\pi]$.
Utilisons les donnée de l'énoncé pour simplifier cette somme :
$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DE}$ sont colinéaires et de même sens, donc $(\overrightarrow{DE};\overrightarrow{AB}) = -(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{DE}) = -0[2\pi] = 0[2\pi]$.
$(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}) = -\frac{2\pi}{3}[2\pi]$, donc d'après le (ii) de la propriété **??**, $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{BC}) = -\frac{2\pi}{3} + \pi[2\pi] = \frac{\pi}{3}[2\pi]$.
$(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CD}) = \frac{\pi}{5}[2\pi]$, donc $(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{DC}) = \frac{\pi}{5}[\pi]$ d'après le (iii) de la propriété **??**.
Finalement, on a :

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{DE};\overrightarrow{DC}) &= (\overrightarrow{DE};\overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AB};\overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BC};\overrightarrow{DC})[2\pi] \\ &= 0 + \overbrace{(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}) + \pi} + (\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CD})[2\pi] \\ &= 0 + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{5}[2\pi] \\ &= \frac{8\pi}{15}[2\pi]\end{aligned}$$

Comme de plus $\frac{8\pi}{15} \in]-\pi;\pi]$, c'est la mesure principale de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DE}$.

4. Lignes trigonométriques

Une *ligne trigonométrique* est une expression désignant une des fonctions trigonométriques étudiées en classe de seconde : cosinus, sinus et tangente. Cette expression vient du fait que cosinus, sinus et tangente d'un réel sont les longueurs de segments (de lignes) sur une figure.

Définition 4.6 Soient x un réel et M son image sur le cercle trigonométrique du repère $(O;\vec{i},\vec{j})$. Le cosinus de x est le réel noté $\cos(x)$ égal à l'abscisse de M. Le sinus de x est le réel noté $\sin(x)$ égal à l'ordonnée de M.

Propriété 4.6 (déjà vue en seconde) Pour tout réel x et tout entier relatif k on a :

$$-1 \leq \cos(x) \leq 1 \qquad -1 \leq \sin(x) \leq 1$$

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1 \qquad \cos(x + 2k\pi) = \cos(x)$$

$$\sin(x + 2k\pi) = \sin(x)$$

Démonstration $\cos(x)$ et $\sin(x)$ sont les coordonnées d'un point du cercle de centre O et de rayon 1, ils sont donc compris entre -1 et 1.
Le repère associé au cercle trigonométrique est orthonormé, donc :

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = (\cos(x) - 0)^2 + (\sin(x) - 0)^2 = (x_M - x_O)^2 + (y_M - y_O)^2 = OM^2 = 1$$

Enfin, les réels x et $x + 2\pi$ correspondent au même point du cercle trigonométrique et donc par unicité des coordonnées, ces réels ont le même sinus et le même cosinus.

On a vu que si x est un réel et k un entier relatif, les images de x et $x + 2k\pi$ sur le cercle trigonométrique sont confondues. On a alors la définition suivante :

Définition 4.7 Le cosinus (resp. sinus) d'un angle orienté est le cosinus (resp. le sinus) d'une mesure en radians de cet angle orienté.

Propriété 4.7 (Angles associés) Soit x un réel. On a :

$$\cos(-x) = \cos(x) \qquad \sin(-x) = -\sin(x)$$

$$\cos(\pi - x) = -\cos(x) \qquad \sin(\pi - x) = \sin(x)$$

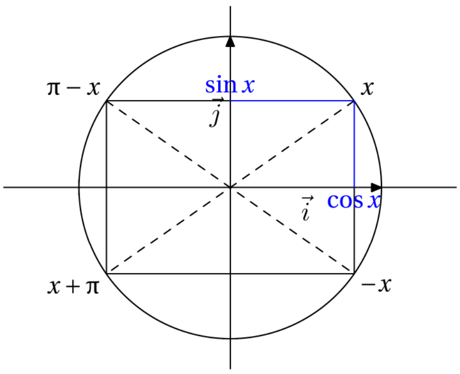
$$\cos(x + \pi) = -\cos(x) \qquad \sin(x + \pi) = -\sin(x)$$

$$\cos\left(x + \tfrac{\pi}{2}\right) = -\sin(x) \qquad \sin\left(x + \tfrac{\pi}{2}\right) = \cos(x)$$

$$\cos\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x) \qquad \sin\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$$

Idée de la démonstration :

Les images des réels x, $\pi - x$, $\pi + x$ et $-x$ sur le cercle trigonométrique sont les sommets d'un rectangle de centre O et dont les axes de symétrie sont les axes du repère :



Les images des réels x et $\frac{\pi}{2} - x$ sur le cercle trigonométrique sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$. Les images sur le cercle trigonométrique des réels $\frac{\pi}{2} - x$ et $\frac{\pi}{2} + x$ sont symétriques par rapport à $(O;\vec{j})$:

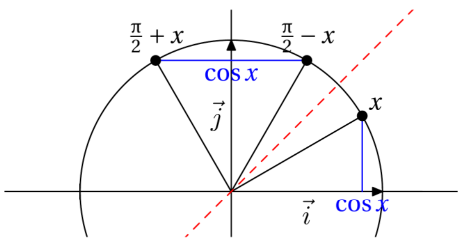
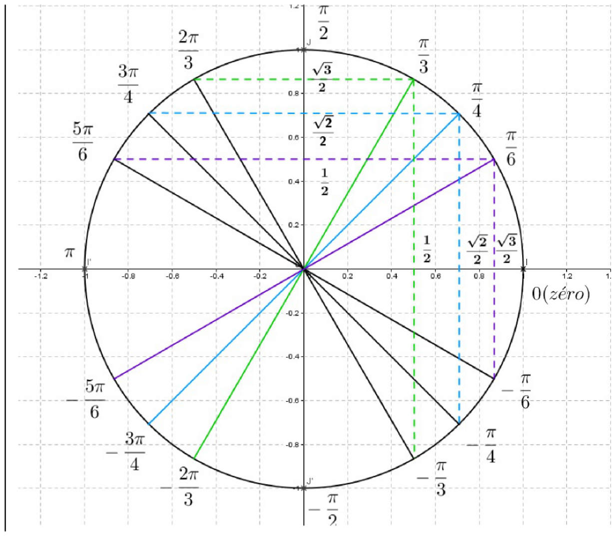


Tableau de quelques valeurs particulières :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

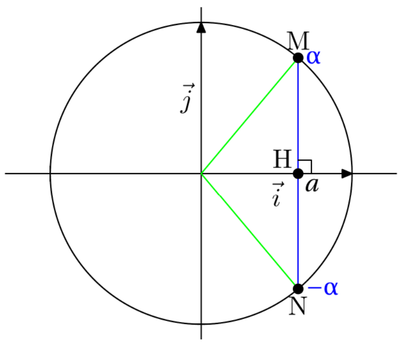


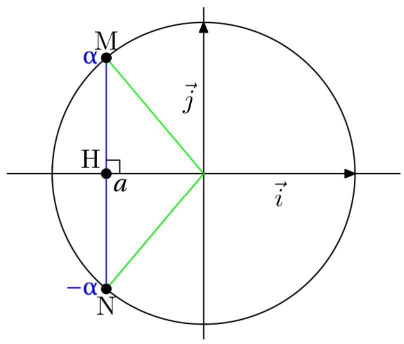
5. Équations

A. Résolution de l'équation $\cos x = a$

Distinguons plusieurs cas :

- si $|a| > 1$, l'équation n'a pas de solution car pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\cos x \leq 1$;
- si $|a| \leq 1$, la perpendiculaire à $(O;\vec{i})$ passant par $H(a;0)$ coupe le cercle trigonométrique en deux points (éventuellement confondus si $\mid a = 1)$; il existe donc deux points du cercle trigonométrique ayant pour abscisse a : les points M et N images des réels α et $-\alpha$ où $\alpha \in]0\,;\,\pi[$. L'équation $\cos x = a$ a donc deux solutions dans $]-\pi\,;\,\pi]$ et les solutions dans $\mathbb{R}$ sont les réels s'écrivant sous la forme $\alpha + 2k\pi$ et $-\alpha + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$





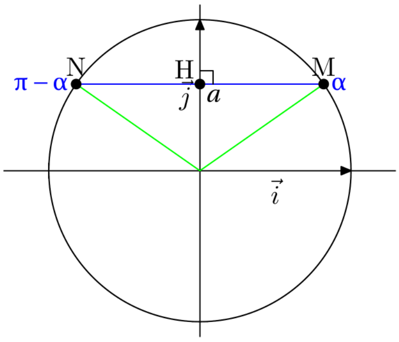
Exemple 4.1 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations $\cos(x) = -\frac{1}{2}$ et $\cos(x) = 1$.
On sait que $\cos(\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, donc $\cos(\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$. Les solutions de la première équation sont donc les réels de la forme : $x = \frac{2\pi}{3}[2\pi]$ ou $x = -\frac{2\pi}{3}[2\pi]$.
Les solutions de la deuxième équation sont les réels de la forme $x = 0[2\pi]$ (dans ce cas les points M et N sont confondus).

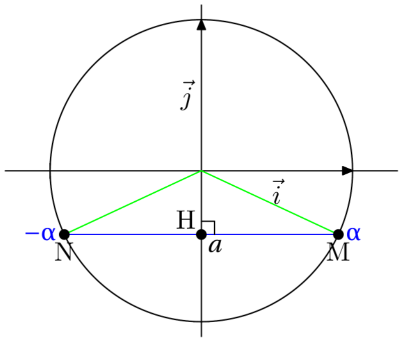
B. Résolution de l'équation $\sin x = a$

Distinguons plusieurs cas :

- si $|a| > 1$, l'équation n'a pas de solution car pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\sin x \leq 1$;
- si $|a| \leq 1$, la perpendiculaire à $(O;\vec{j})$ passant par $H(0;a)$ coupe le cercle trigonométrique en deux points (éventuellement confondus si $\mid a = 1)$; il existe donc deux points du cercle trigonométrique ayant pour ordonnée a : les points M et N images des réels α et $\pi - \alpha$ où $\alpha \in]-\pi\,;\,\pi]$. L'équation $\sin x = a$ a donc deux solutions dans $]-\pi\,;\,\pi]$ [1] et les solutions dans $\mathbb{R}$ sont les réels s'écrivant sous la forme $\alpha + 2k\pi$ et $\pi - \alpha + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$

1. Attention : une solution est α, l'autre est la mesure principale de $\pi - \alpha$ qui peut éventuellement être différente de $\pi - \alpha$.





Propriété 4.8 (Synthèse) Soient x et y deux réels quelconques :
- l'égalité $\cos x = \cos y$ équivant à $x = \pm y + 2k\pi$;
- l'égalité $\sin x = \sin y$ équivaut à $x = y + 2k\pi$ ou $x = \pi - y + 2k\pi$.

Démonstration (Idée de la démonstration) La droite d'équation $x = k$ coupe le cercle trigonométrique en au plus deux points, images de α et $-\alpha$ (par symétrie d'axe (Ox)).
La droite d'équation $y = k$ coupe le cercle trigonométrique en au plus deux points, images de α et $\pi - \alpha$ (par symétrie d'axe (Oy)).

Exemple 4.2 On considère l'équation $(E) : \sin(x) = \cos(\frac{\pi}{3})$.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E).
2. Résoudre dans $]-\pi\,;\,\pi]$ l'équation (E).

1. En utilisant la propriété **??**, on remarque que $\cos(\frac{\pi}{3}) = \sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3})$.
   L'équation (E) est donc équivalente à $\sin(x) = \sin(\frac{\pi}{6})$. Les solutions sont donc :

$$\left\{\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{array}\right. , k \in \mathbb{Z}$$

2. Parmi les solutions précédentes, cherchons celles qui sont dans l'intervalle $]-\pi\,;\,\pi]$. On obtient deux solutions : $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{5\pi}{6}$.